已思考（用时 18 秒）

泰勒级数是微积分中一个核心工具，它的思想很美妙：**用多项式这种最简单的函数，去逼近任何复杂光滑的函数。**

一、核心思想：以简代繁

多项式只涉及加、减、乘三种运算，求值非常容易。如果一个复杂的函数（比如 $\sin x$、e^x）可以用多项式来近似，计算就会变得极其简单。

泰勒级数做的就是这件事：在某个点附近，找一个幂级数，让它的函数值、各阶导数值都和原函数完全一致。

二、定义

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有任意阶导数，其**泰勒级数**为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

展开写就是：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

特别地，当 $a=0$ 时，称为**麦克劳林级数**，形式更简洁：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

三、直观理解

通过控制多项式每一项的系数，泰勒级数“模仿”了原函数在 a 点附近的行为：

- **零阶项** $f(a)$：保证在 a 点取值一致。
- **一阶项** $f'(a)(x-a)$：保证切线斜率一致，给出线性近似。
- **二阶项** $\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$：保证弯曲程度（凹凸性）一致。

- ……项数越多，近似的精确度越高，范围也越大。

四、常见函数的麦克劳林展开

这些公式值得熟记（注明了收敛区间）：

- **指数函数**：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

- **正弦函数**：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

- **余弦函数**：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$$

- **几何级数**：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

- **对数函数**：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

- **二项式级数**（α 为任意实数）：

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

当 α 为正整数时，展开只包含有限项，就是二项式定理。

五、余项：误差有多大

实际用多项式近似时，必须要知道截断后带来的误差。拉格朗日余项给出了一种估计：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 a 与 x 之间。若能证明 $n \to \infty$ 时余项趋于0，泰勒级数就收敛到原函数。

六、应用举例

1. **近似计算**
   小角度时 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$，计算 sin(0.1) 又快又准。
2. **求极限**
   如 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$，展开 $\sin x$ 立即得到 $-\frac{1}{6}$。
3. **物理简化**
   单摆近似、相对论低能近似等，都是取泰勒展开的一两项。
4. **构建数值算法**
   许多微分方程无法解析求解，可用泰勒展开构造数值方法。
5. **证明欧拉公式**
   把 e^{ix} 展开，对比实部和虚部，自然得出 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$。

七、一点提醒

并不是所有光滑函数的泰勒级数都等于它自身。经典反例：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处所有导数都为0，泰勒级数恒为0，但原函数在0附近除了0点本身，并不恒为0。这类函数不是“解析”的，泰勒级数无法重现它。